

**Prot. n. 311** del 16 settembre 2004

*IPCF Rapporto Interno*

N. 1/092004

SIMULAZIONI E STUDIO DI FATTIBILITÀ DI UN  
OPCPA

Marco Galimberti

*Laboratorio per l'Irraggiamento con Laser Intensi, IPCF, Area della Ricerca CNR,  
Via G. Moruzzi 1, 56124 Pisa, Italy  
email: galimber@ipcf.cnr.it*

---

---

# 1 Introduzione

L'attuale tecnologia laser più affermata per la generazione e l'amplificazione di impulsi laser ultracorti usa il Ti:Sa come materiale attivo. Tale materiale presenta infatti una grande banda di amplificazione ( $\approx 150$  nm) ed ha permesso di ottenere impulsi laser di durata inferiore a 10 fs. D'altro canto, per ottenere impulsi di alta energia è necessario utilizzare fattori di amplificazione enormi per portare le energie tipiche di un impulso generato da un oscillatore, dell'ordine del nJ, ad energie di qualche mJ. Questo comporta ad un restringimento della banda complessiva di amplificazione e alla comparsa dell'ASE (*Amplified Self Emission*).

Attualmente esistono vari schemi per allargare la banda di amplificazione, sostanzialmente attenuando selettivamente le varie frequenze di cui è composto l'impulso, mentre la riduzione dell'ASE è un problema di difficile soluzione.

Per ovviare ai problemi di banda e ridurre i problemi di ASE è stato recentemente proposto di amplificare gli impulsi ultracorti utilizzando un amplificatore parametrico. In questo rapporto verrà studiato il funzionamento di un amplificatore parametrico, in modo trovare una configurazione ottimale per l'amplificazione di un impulso a banda larga. Tale configurazione verrà infine utilizzata per simulare numericamente un amplificatore parametrico operante su un impulso allungato (CPA).

## 2 Amplificazione parametrica

Un amplificatore parametrico ottico (OPA) è costituito da un cristallo ottico che presenta una non-linearità quadratica (ovvero un cristallo duplicatore come KDP, BBO, LBO, ecc.) su cui incidono due fasci: il primo di alta intensità, chiamato fascio di pompa (*Pump*), e il secondo di bassa intensità, chiamato segnale (*Signal*). In uscita si avranno tre fasci: oltre ai due fasci incidenti si ha la formazione di un terzo fascio, chiamato *idler*.

Chiamiamo  $\mathbf{k}^P$  e  $\omega_P$  rispettivamente il vettore d'onda e la frequenza del fascio di pompa all'interno del cristallo. Analogamente  $\mathbf{k}^S$  e  $\omega_S$  sono quelli del segnale e  $\mathbf{k}^I$  e  $\omega_I$  quelli dell'idler. Per avere amplificazione parametrica è necessario che

$$\omega_P > \omega_S \tag{1}$$

e che sia verificata la seguente relazione tra le pulsazioni

$$\omega_P = \omega_S + \omega_I. \tag{2}$$

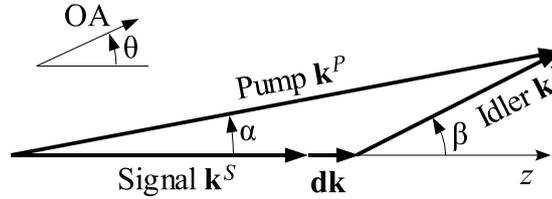
L'amplificazione risulta massima quando si è in presenza di *phase matching*, ovvero

$$\mathbf{k}^P = \mathbf{k}^S + \mathbf{k}^I \tag{3}$$

## 2.1 Phase matching

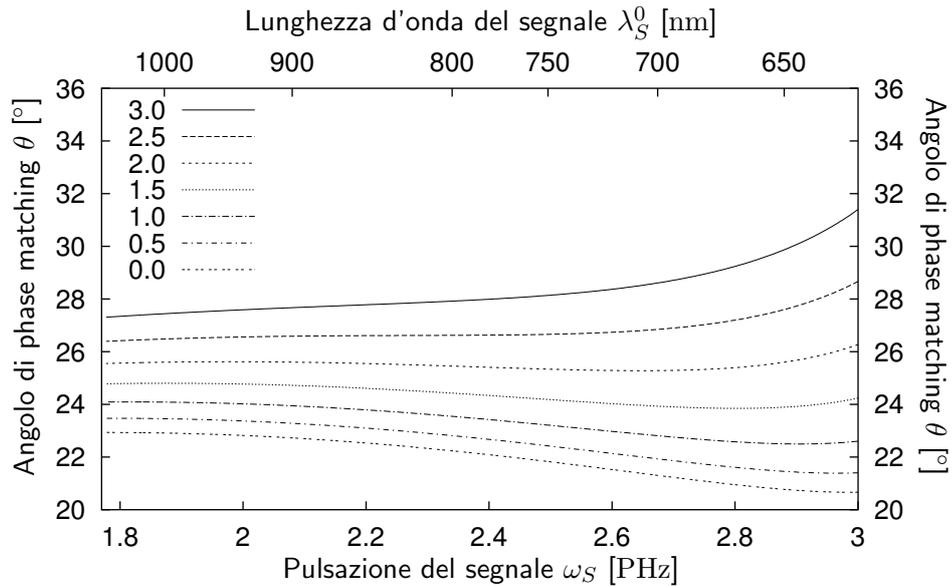
Siccome le direzioni di  $\mathbf{k}^P$  e  $\mathbf{k}^S$  sono fissati, per ottenere il phase matching è necessario poter regolare il modulo di almeno uno dei vettori d'onda. Questo viene fatto sfruttando la dirifrangenza dei cristalli dublicatori. Considerando, per esempio, i cristalli monoassici negativi (ad esempio BBO, KDP), il phase matching può essere ottenuto in due configurazioni, note come tipo I e tipo II. Nel tipo I il fascio di pompa è un fascio straordinario mentre gli altri due fasci sono ordinari. Il tipo II richiede sia il fascio di pompa che uno degli altri due fasci straordinari mentre il rimanente è un fascio ordinario. Il phase matching si ottiene ruotando l'asse ottico del cristallo rispetto ai fasci straordinari.

D'ora in poi prenderemo in considerazione solo la configurazione di tipo I e considereremo la configurazione di fig. 1 all'interno del cristallo.



**Figura 1:** Configurazione dei vettori d'onda considerata all'interno del cristallo.

Scegliendo un cristallo BBO e ponendo  $\lambda_p^0 = 527$  nm, con  $\lambda_p^0$  la lunghezza d'onda della pompa nel vuoto, si può calcolare i vari angoli  $\theta$  di phase matching per differenti angoli  $\alpha$  di pompa e  $\lambda_s^0$  lunghezze d'onda del segnale (sempre in vuoto).



**Figura 2:** Angoli di phase matching per differenti angoli  $\alpha$  del fascio di pompa per un cristallo BBO e con  $\lambda_p^0 = 527$  nm.

Come si può notare dal grafico in fig. 2, nella regione spettrale attorno a 800 nm è possibile trovare una configurazione di  $\theta$  e  $\alpha$  in cui si abbia una condizione vicina al phase matching per un'ampia regione spettrale.

## 2.2 Modello matematico di un OPA

Scriviamo i campi elettrici dei tre fasci all'interno del cristallo nella forma

$$\mathbf{E}^j(\mathbf{x}, t) = E_j(z, t) \mathbf{a}^j e^{i(\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x} - \omega_j t)} + c.c. \quad \text{con } j = S, I, P \quad (4)$$

dove  $\mathbf{a}^j$  è il versore di direzione del campo elettrico di ogni singolo fascio,  $\mathbf{x}$  è il vettore delle coordinate spaziali  $(x, y, z)$  e  $E_j(z, t)$  è l'ampiezza del campo elettrico. Il legame tra  $\mathbf{k}^j$  e  $\omega_j$  e la determinazione di  $\mathbf{a}^j$  vengono dalla teoria della propagazione di un'onda piana in un mezzo birifrangente lineare.

Partendo dalle equazioni di Maxwell, dopo semplici operazioni matematiche si ottiene

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (5)$$

dove  $\mathbf{P}$  è il vettore di polarizzazione, le cui componenti sono

$$\mathbf{P}_i = \chi_{ij} \mathbf{E}_j + \chi_{ijk}^{(2)} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k \quad (6)$$

Scegliendo la direzione di  $\mathbf{k}^I$  in modo da avere il vettore

$$\mathbf{dk} = \mathbf{k}^P - \mathbf{k}^S - \mathbf{k}^I \quad (7)$$

parallelo all'asse  $z$ , il problema può essere trattato in modo unidimensionale lungo  $z$ .

Inserendo le eq. 4 nell'eq. 5 e separando il termine nonlineare dell'eq. 6 nelle tre componenti spettrali, si ottiene

$$(k_z^j - (\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{a}^j) a_z^j) c^2 \frac{\partial E_j}{\partial z} + \omega_j \varepsilon_j \frac{\partial E_j}{\partial t} = 2\pi i \omega_j^2 \mathbf{P}_{NL}^j \cdot \mathbf{a}^j e^{-i\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{x}} \quad (8)$$

dove si sono trascurati le derivate seconde di  $E_j$  (ipotesi di lente variazioni) e si è posto

$$\varepsilon_j = a_i^j \varepsilon_{il} a_l^j \quad (9)$$

con  $\varepsilon_{il}$  il tensore dielettrico del cristallo. Il termine  $\mathbf{P}_{NL}^j \cdot \mathbf{a}^j$  del secondo membro dell'eq. 8 risulta essere

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}^S \cdot \mathbf{a}^S &= 2d_{eff} E_I^* E_P e^{i(\mathbf{k}^P - \mathbf{k}^I) \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{P}_{NL}^I \cdot \mathbf{a}^I &= 2d_{eff} E_S^* E_P e^{i(\mathbf{k}^P - \mathbf{k}^S) \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{P}_{NL}^P \cdot \mathbf{a}^P &= 2d_{eff} E_S E_I e^{i(\mathbf{k}^S + \mathbf{k}^I) \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (10)$$

con

$$d_{eff} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} a_i^P a_j^S a_k^I \quad (11)$$

e dove si sono utilizzate le relazioni di simmetria di  $\chi_{ijk}^{(2)}$ . Tramite le eq. 10, le eq. 8 divengono

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_S}{\partial z} + \frac{\tilde{n}_S}{c} \frac{\partial E_S}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_S \tilde{n}_S d_{eff}}{\varepsilon_S c} E_I^* E_P e^{i\Delta k z} \\ \frac{\partial E_I}{\partial z} + \frac{\tilde{n}_I}{c} \frac{\partial E_I}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_I \tilde{n}_I d_{eff}}{\varepsilon_I c} E_S^* E_P e^{i\Delta k z} \\ \frac{\partial E_P}{\partial z} + \frac{\tilde{n}_P}{c} \frac{\partial E_P}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_P \tilde{n}_P d_{eff}}{\varepsilon_P c} E_S E_I e^{-i\Delta k z}\end{aligned}\quad (12)$$

con  $\Delta k = \mathbf{dk}_z$  e

$$\tilde{n}_j = \frac{\omega_j \varepsilon_j}{(k_z^j - (\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{a}^j) a_z^j) c} \quad (13)$$

Il parametro  $\tilde{n}_j$  è legato alla velocità di propagazione dell'onda. Infatti il termine  $c/\tilde{n}_j$  altri non è che la componente lungo  $z$  della velocità di propagazione, che nel nostro caso è la velocità di fase. Una trattazione più accurata della dispersione [1] porta a sostituire nella parte a sinistra delle eq. 12 la velocità di fase con quella di gruppo, per cui si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_S}{\partial z} + \frac{1}{v_{gz}^S} \frac{\partial E_S}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_S \tilde{n}_S d_{eff}}{\varepsilon_S c} E_I^* E_P e^{i\Delta k z} \\ \frac{\partial E_I}{\partial z} + \frac{1}{v_{gz}^I} \frac{\partial E_I}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_I \tilde{n}_I d_{eff}}{\varepsilon_I c} E_S^* E_P e^{i\Delta k z} \\ \frac{\partial E_P}{\partial z} + \frac{1}{v_{gz}^P} \frac{\partial E_P}{\partial t} &= i \frac{4\pi\omega_P \tilde{n}_P d_{eff}}{\varepsilon_P c} E_S E_I e^{-i\Delta k z}\end{aligned}\quad (14)$$

dove  $v_{gz}^j$  sono le componenti lungo l'asse  $z$  delle tre velocità di gruppo. Per comodità futura poniamo

$$n_j = \frac{\varepsilon_j}{\tilde{n}_j} = \frac{(k_z^j - (\mathbf{k}^j \cdot \mathbf{a}^j) a_z^j) c}{\omega_j} \quad (15)$$

Passando a dei campi normalizzati  $u_j$ , definiti come

$$u_S = E_S/E_P^0 \quad u_I = E_I/E_P^0 \quad u_P = E_P/E_P^0 \quad (16)$$

dove  $E_P^0$  è un valore di riferimento del campo elettrico del fascio di pompa, come ad esempio il valore relativo all'intensità massima, è possibile ricavare dalle eq. 14 una lunghezza di riferimento  $L_N$

$$L_N = \frac{\sqrt{n_S n_I} c}{4\pi \sqrt{\omega_S \omega_I} d_{eff} E_P^0} \quad (17)$$

Facendo il cambio di variabili

$$\zeta = \frac{z}{L_N} \quad \tau = \frac{L_N}{v_0} \left( t - \frac{z}{v_0} \right) \quad (18)$$

dove  $v_0$  è un valore medio tra le componenti lungo  $z$  delle velocità di gruppo, le eq. 14 divengono

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_S}{\partial \zeta} + \left( \frac{v_{gz}^S - v_0}{v_{gz}^S} \right) \frac{\partial u_S}{\partial \tau} &= i \sqrt{\frac{\omega_S}{\omega_I}} \sqrt{\frac{n_I}{n_S}} u_I^* u_P e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \zeta} + \left( \frac{v_{gz}^I - v_0}{v_{gz}^I} \right) \frac{\partial u_I}{\partial \tau} &= i \sqrt{\frac{\omega_I}{\omega_S}} \sqrt{\frac{n_S}{n_I}} u_S^* u_P e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_P}{\partial \zeta} + \left( \frac{v_{gz}^P - v_0}{v_{gz}^P} \right) \frac{\partial u_P}{\partial \tau} &= i \frac{\sqrt{\omega_S \omega_I}}{\omega_P} \frac{\sqrt{n_I n_S}}{n_P} u_S u_I e^{-i\Delta k L_N \zeta}\end{aligned}\quad (19)$$

Nel caso in cui si possa trascurare la differenza tra le velocità di gruppo si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_S}{\partial \zeta} &= i \sqrt{\frac{\omega_S}{\omega_I}} \sqrt{\frac{n_I}{n_S}} u_I^* u_P e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \zeta} &= i \sqrt{\frac{\omega_I}{\omega_S}} \sqrt{\frac{n_S}{n_I}} u_S^* u_P e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_P}{\partial \zeta} &= i \frac{\sqrt{\omega_S \omega_I}}{\omega_P} \frac{\sqrt{n_I n_S}}{n_P} u_S u_I e^{-i\Delta k L_N \zeta}\end{aligned}\quad (20)$$

### 2.3 Guadagno a basso segnale

Partendo dalle eq. 19 è possibile trovare una soluzione analitica se

1. si considera il problema stazionario, ovvero si trascurano le derivate temporali
2. l'intensità del segnale e dell'idler rimangono trascurabili rispetto a quella di pompa.

Con queste ipotesi le eq. 19 divengono

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_S}{\partial \zeta} &= i \sqrt{\frac{\omega_S}{\omega_I}} \sqrt{\frac{n_I}{n_S}} u_I^* e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \zeta} &= i \sqrt{\frac{\omega_I}{\omega_S}} \sqrt{\frac{n_S}{n_I}} u_S^* e^{i\Delta k L_N \zeta} \\ \frac{\partial u_P}{\partial \zeta} &= 0\end{aligned}\quad (21)$$

Chiamando

$$f_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{n_j}} u_j \quad (22)$$

si ottiene

$$\frac{\partial f_S}{\partial \zeta} = i f_I^* e^{i\Delta k L_N \zeta} \quad \frac{\partial f_I}{\partial \zeta} = i f_S^* e^{i\Delta k L_N \zeta} \quad (23)$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f_S}{\partial \zeta^2} - i\Delta k L_N \frac{\partial f_S}{\partial \zeta} - f_S = 0 \quad \left. \frac{\partial f_S}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0 \quad f_I^* = -i \frac{\partial f_S}{\partial \zeta} e^{-i\Delta k L_N \zeta} \quad (24)$$

che ha soluzioni della forma

$$\begin{aligned} f_S(\zeta) &= f_S(0) \left( \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} e^{\Lambda_1 \zeta} - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} e^{\Lambda_2 \zeta} \right) \\ f_I^*(\zeta) &= -i f_S(0) \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} (e^{\Lambda_1 \zeta} - e^{\Lambda_2 \zeta}) e^{-i\Delta k L_N \zeta} \end{aligned} \quad (25)$$

dove

$$\Lambda_1 = i \frac{\Delta k L_N}{2} - \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta k L_N}{2} \right)^2} \quad \Lambda_2 = i \frac{\Delta k L_N}{2} + \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta k L_N}{2} \right)^2} \quad (26)$$

da cui risulta che per avere amplificazione è necessario che

$$|\Delta k L_N| < 2. \quad (27)$$

La soluzione del sistema di eq. 21 è quindi

$$\begin{aligned} u_S(\zeta) &= u_S(0) \left( \cosh(\Gamma \zeta) - i \frac{\sqrt{1 - \Gamma^2}}{\Gamma} \sinh(\Gamma \zeta) \right) e^{i\sqrt{1 - \Gamma^2} \zeta} \\ u_I(\zeta) &= i u_S(0) \sqrt{\frac{\omega_I}{\omega_S}} \sqrt{\frac{n_S}{n_I}} \sinh(\Gamma \zeta) \frac{e^{-i\sqrt{1 - \Gamma^2} \zeta}}{\Gamma} \end{aligned} \quad (28)$$

dove

$$\Gamma = \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta k L_N}{2} \right)^2}. \quad (29)$$

Supponendo  $\Gamma$  reale, le intensità dei fasci risulta essere

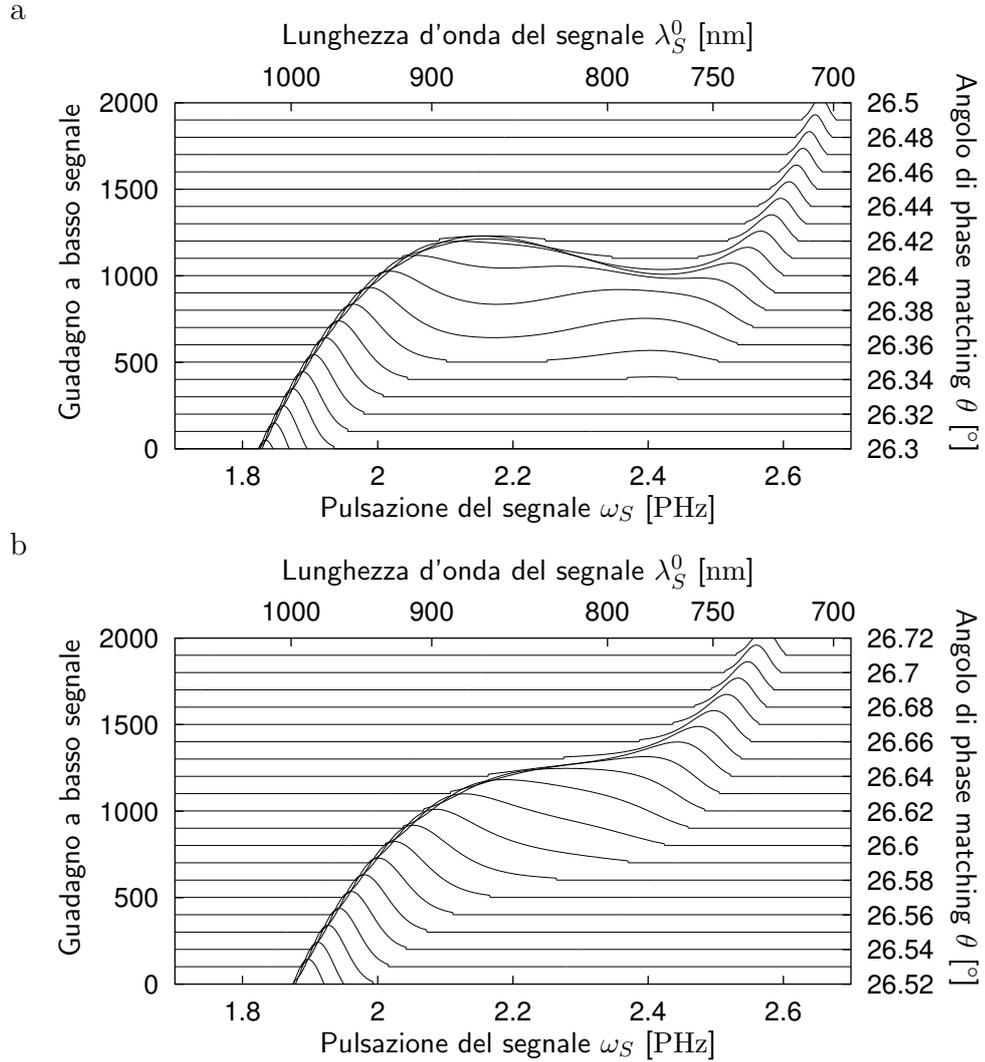
$$\begin{aligned} I_S(z) &= I_S(0) \left[ 1 + \left( \frac{L_N^{eff}}{L_N} \right)^2 \sinh^2 \left( \frac{z}{L_N^{eff}} \right) \right] \\ I_I(z) &= I_S(0) \frac{\omega_I n_S}{\omega_S n_I} \left( \frac{L_N^{eff}}{L_N} \right)^2 \sinh^2 \left( \frac{z}{L_N^{eff}} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

dove

$$L_N^{eff} = L_N \left[ 1 - \left( \frac{\Delta k L_N}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Il guadagno a basso segnale  $G$  risulta quindi essere

$$G = 1 + \left( \frac{L_N^{eff}}{L_N} \right)^2 \sinh^2 \left( \frac{z}{L_N^{eff}} \right) \quad (32)$$



**Figura 3:** Curve di guadagno a basso segnale per un cristallo BBO di 1 cm e differenti angoli  $\theta$  e un fascio di pompa a  $\lambda_P^0 = 527$  nm,  $I_P^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$  con: a -  $\alpha = 2.4^\circ$ ; b -  $\alpha = 2.5^\circ$ . Le curve sono state traslate verticalmente per chiarezza.

L'andamento del guadagno con la frequenza del segnale per differenti angoli  $\theta$  e  $\alpha$  per un cristallo BBO e un fascio di pompa di  $\lambda_P^0 = 527$  nm e  $I_P^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$  è mostrato in fig. 3. Da questi grafici si nota una regione in cui il guadagno risulta abbastanza piatto per un'ampia regione spettrale.

### 3 Selezione degli angoli

Utilizzando l'espressione del guadagno a basso segnale è quindi possibile ricercare la configurazione migliore, in termini larghezza di banda, per poter amplificare un impulso laser. L'obiettivo è di ottenere un'amplificazione abbastanza piatta attorno ad una lunghezza d'onda di 800 nm.

I parametri del fascio di pompa e il tipo di cristallo sono gli stessi di fig. 3. La scelta degli angoli è stata fatta in due passi. Nel primo passo si è definito un angolo  $\theta_B$  ottimale per un dato angolo di pompa  $\alpha$  mentre nel secondo si è selezionato il miglior  $\alpha$  in base alla larghezza di banda di amplificazione.

### 3.1 Selezione del $\theta_B$ ottimale

Partendo dalla curva di guadagno per un dato  $\alpha$ , si seleziona l'intervallo di frequenze  $[\omega_1, \omega_2]$  del segnale dove il guadagno risulta essere maggiore di 1 e che contenga (o sia vicino) a 800 nm.

Definendo la funzione  $f$  come

$$f(\omega_S, \alpha, \theta) = G(\omega_S, \alpha, \theta) - 1 \quad (33)$$

dove  $G$  è il guadagno di segnale a frequenza  $\omega_S$  per un dato  $\alpha$  e  $\theta$ , vengono calcolati i primi tre momenti di  $f$  nell'intervallo  $[\omega_1, \omega_2]$ , ovvero

$$\mathcal{G}(\alpha, \theta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega, \alpha, \theta) d\omega \quad (34)$$

$$\omega_m(\alpha, \theta) = \frac{1}{\mathcal{G}(\alpha, \theta)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega f(\omega, \alpha, \theta) d\omega \quad (35)$$

$$\delta\omega(\alpha, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{G}(\alpha, \theta)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\omega - \omega_m(\omega, \alpha, \theta))^2 f(\omega, \alpha, \theta) d\omega} \quad (36)$$

$$\varpi(\alpha, \theta) = \sqrt[3]{\frac{1}{\mathcal{G}(\alpha, \theta)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\omega - \omega_m(\omega, \alpha, \theta))^3 f(\omega, \alpha, \theta) d\omega} \quad (37)$$

Si è definito  $\theta_B$  ottimale l'angolo  $\theta$  dove

$$\varpi(\alpha, \theta_B(\alpha)) = 0 \quad (38)$$

cioè quando il picco di guadagno risulti il più simmetrico possibile rispetto alla frequenza mediana  $\omega_m$ . Le curve di guadagno che si ottengono con i  $\theta_B$  per differenti  $\alpha$  sono mostrate in fig. 4.

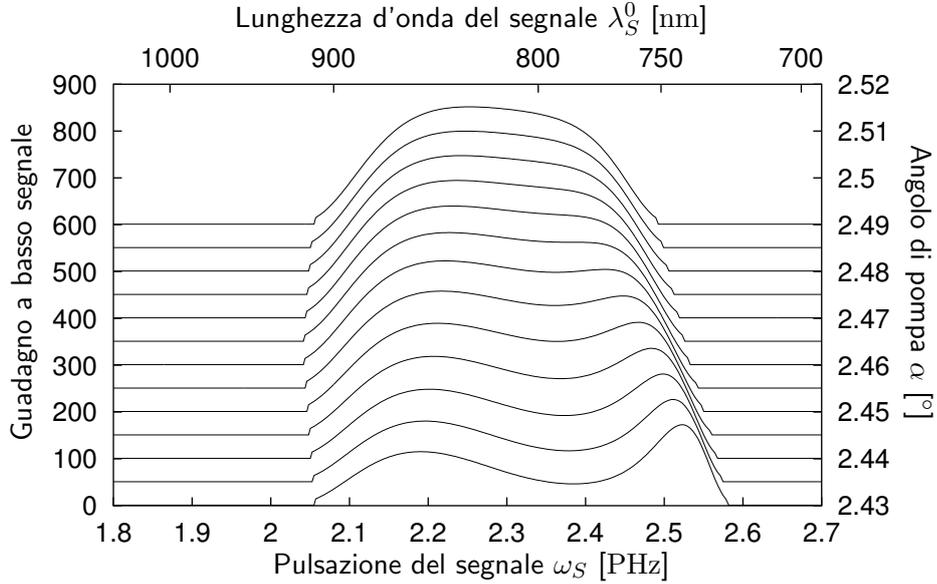
### 3.2 Scelta di $\alpha$

Consideriamo ora la curva di guadagno  $g(\omega)$  per un dato  $\alpha$ , calcolata nel rispettivo  $\theta_B$ . Fissando una soglia sul guadagno  $S_g$ , posta a  $S_g = 0.9 * (G_m - 1) + 1$  con  $G_m$  il guadagno massimo, è possibile trovare due valori di pulsazioni  $\omega_{m1}$  e  $\omega_{m2}$ , contenuti nell'intervallo  $[\omega_1, \omega_2]$ , tali per cui

$$g(\omega_1) = g(\omega_2) = S_g \quad (39)$$

e che

$$g(\omega) < S_g \quad \omega_1 < \omega < \omega_{m1} \quad e \quad \omega_{m2} < \omega < \omega_2. \quad (40)$$



**Figura 4:** Curve di guadagno a basso segnale per un cristallo BBO di 1 cm e differenti angoli di pompa  $\alpha$  all'angolo ottimale  $\theta_B$  del cristallo. Le curve sono state traslate verticalmente per chiarezza.

Definiamo, quindi, la larghezza di amplificazione  $\Delta\omega$  e la lunghezza d'onda di centro-banda  $\lambda_c$  come

$$\Delta\omega = \omega_{m2} - \omega_{m1} \quad \lambda_c = \frac{4\pi c}{\omega_{m1} + \omega_{m2}} \quad (41)$$

Definiamo anche il parametro  $\mathcal{F}$  come

$$\mathcal{G}_m = \frac{1}{\omega_{m2} - \omega_{m1}} \int_{\omega_{m1}}^{\omega_{m2}} f(\omega) d\omega \quad (42)$$

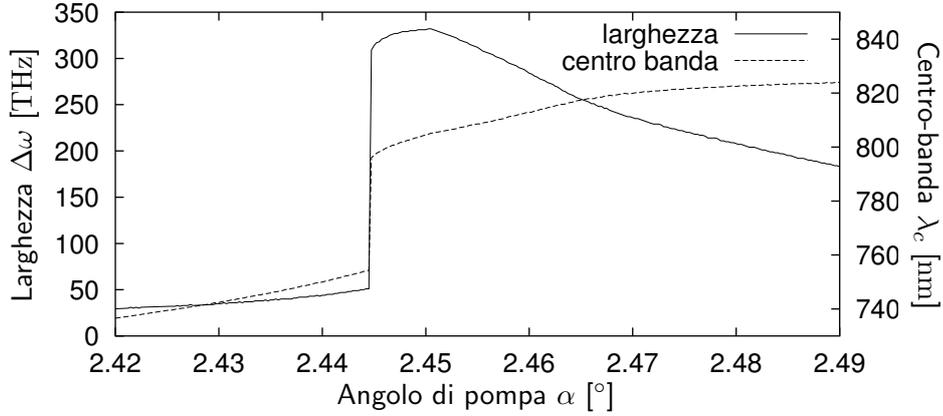
$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{1}{\omega_{m2} - \omega_{m1}} \int_{\omega_{m1}}^{\omega_{m2}} (f(\omega) - \mathcal{G}_m)^2 d\omega} \quad (43)$$

dove si è omessa la dipendenza da  $\alpha$  per chiarezza. Il parametro  $\mathcal{F}$  rappresenta gli scarti dal valore medio all'interno dell'intervallo  $[\omega_{m1}, \omega_{m2}]$ . In altre parole è un indice dell'uniformità di guadagno in detto intervallo.

Dall'analisi del grafico di  $\Delta\omega$  e  $\lambda_c$  al variare di  $\alpha$ , mostrato in fig. 5, si nota la presenza di un salto a  $\alpha \simeq 2.4454^\circ$ . Questo è dovuto al fatto che il secondo picco, visibile a piccoli  $\alpha$  in fig. 4, passa sopra soglia.

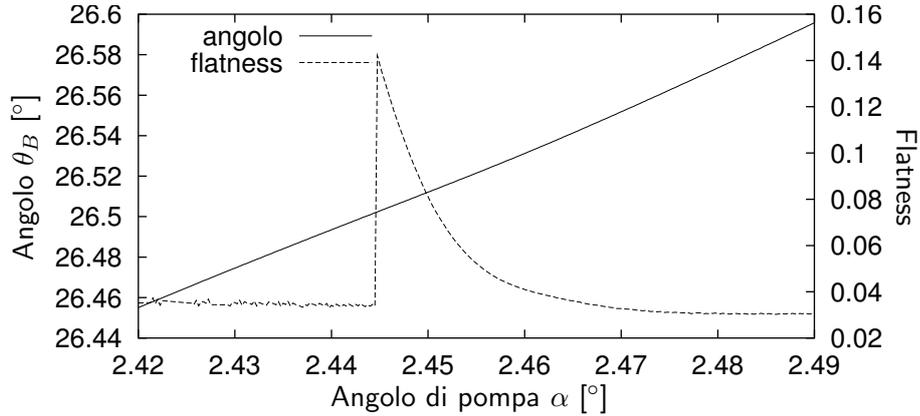
Prendendo la posizione del massimo della larghezza di banda, cioè a  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$  che corrisponde a  $\Delta\omega \simeq 332$  THz, il centro-banda risulta a  $\lambda_c \simeq 805$  nm, in buon accordo con la richiesta di poter amplificare un impulso a 800 nm.

Dal grafico della flatness  $\mathcal{F}$  di fig. 6 si vede che questa ha un picco in corrispondenza del salto, per poi scendere rapidamente. Nella posizione di massima larghezza di banda ha un valore pari a  $\mathcal{F} \simeq 0.076$ . Per avere flatness inferiori è necessario



**Figura 5:** Larghezza di amplificazione e lunghezza d'onda di centro banda al variare dell'angolo di pompa  $\alpha$ .

aumentare l'angolo  $\alpha$ , sacrificando un po' di larghezza di banda e spostando il centro banda verso lunghezze d'onda maggiori. Infine, sempre dalla fig. 6, l'angolo  $\theta$  ottimale, considerando il valore di  $\alpha$  sopra indicato, risulta pari a  $\theta \simeq 26.5133^\circ$ .



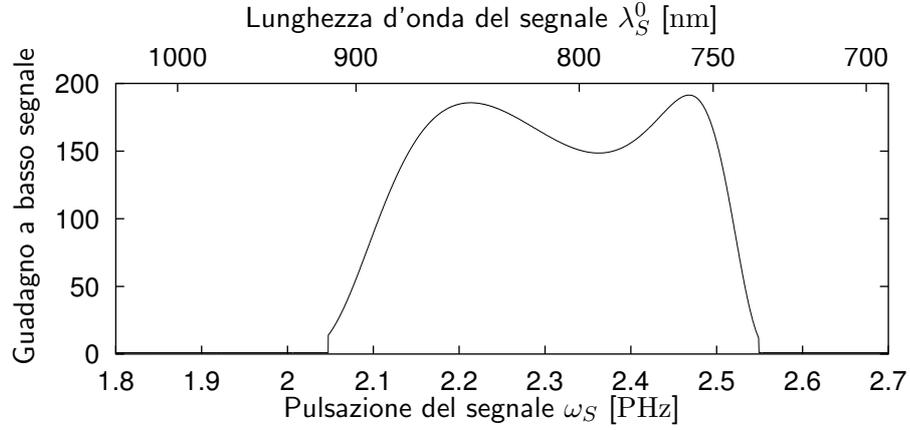
**Figura 6:** Angolo di phase matching  $\theta_B$  e flatness  $\mathcal{F}$  al variare dell'angolo di pompa  $\alpha$ .

Con i parametri sopra indicati si ottiene la curva di guadagno mostrata in fig. 7.

### 3.3 Direzione dei fasci

Nella trattazione matematica si è considerato onde piane. In realtà i fasci interessati hanno una dimensione trasversale finita. Risulta quindi importante verificare la sovrapposizione spaziale dei fasci, in modo particolare per quanto riguarda il fascio di pompa con quello del segnale.

Nella geometria considerata, il fascio del segnale è ordinario, come il fascio idler, per cui la sua direzione all'interno del cristallo è parallela alla direzione del vettore d'onda. D'altro canto, il fascio di pompa è straordinario, per cui la sua direzione non coincide con la direzione del vettore d'onda.



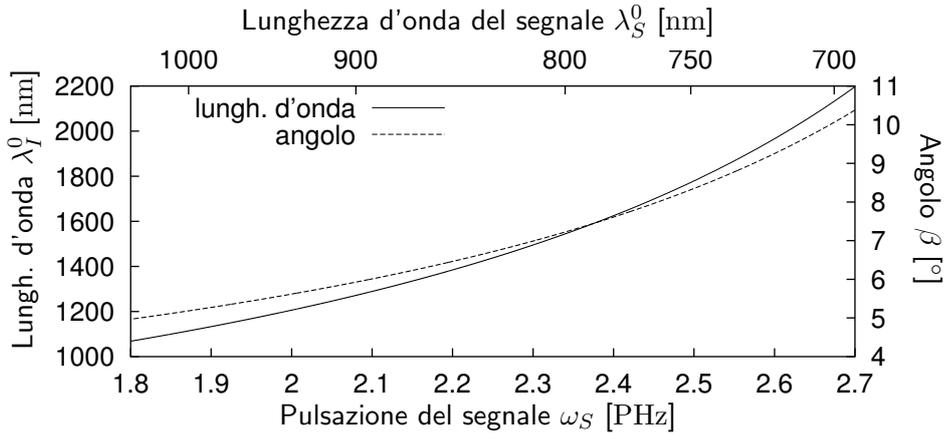
**Figura 7:** Guadagno a basso segnale per un cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$  con un fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527$  nm,  $I_p^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$  e  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$ .

Prendendo in considerazione la configurazione scelta nel paragrafo precedente, e chiamando  $\gamma$  l'angolo di propagazione del fascio di pompa con l'asse  $z$ , si trova che

$$\gamma \simeq -0.87^\circ \quad (44)$$

Da notare che tale angolo fuori dal cristallo è di  $\gamma^0 \simeq 4.1^\circ$ .

Per quanto riguarda il fascio di idler, la differenza di direzione di propagazione rispetto a quella del segnale può portare ad una minor amplificazione di quest'ultimo su di un bordo. Tale effetto è in corso di valutazione. Riportiamo qui, per completezza, il grafico degli angoli  $\beta$  e della relativa lunghezza d'onda, in fig. 8.



**Figura 8:** Lunghezza d'onda e direzione del fascio idler all'interno del cristallo per un cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$  con un fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527$  nm e  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$ .

### 3.4 Velocità di gruppo

Nel caso in cui si debba amplificare impulsi di laser è importante valutare le differenti velocità di gruppo dei tre fasci. Prendendo in considerazione la solita configurazione

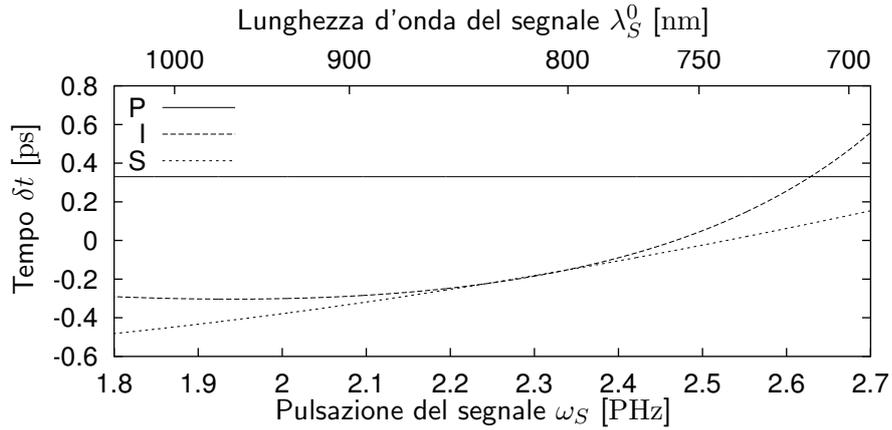
per il cristallo e definendo  $v_0$  come

$$v_0 = \frac{v_{gz}^P + v_{gz}^S + v_{gz}^I}{3} \Big|_{\lambda_S = \lambda_c} \quad (45)$$

si ottiene  $v_0 = 0.592c$ . Questo valore va confrontato con la componente  $z$  della velocità di gruppo dei tre fasci. In particolare, se  $\Delta t$  è la durata dell'impulso da amplificare e  $L_c$  la lunghezza del cristallo, per poter trascurare le differenti velocità di gruppo è necessario che

$$\delta t^j = \frac{L_c}{v_{gz}^j} - \frac{L_c}{v_0} \quad \Delta t \gg \delta t^j \quad j = P, S, I \quad (46)$$

Dal grafico di fig. 9, dove sono riportati i grafici dei tre  $\delta t^j$  per  $L_c = 1$  cm, si nota che la differenza di velocità di gruppo può essere trascurata se  $\Delta t \gg 1$  ps.

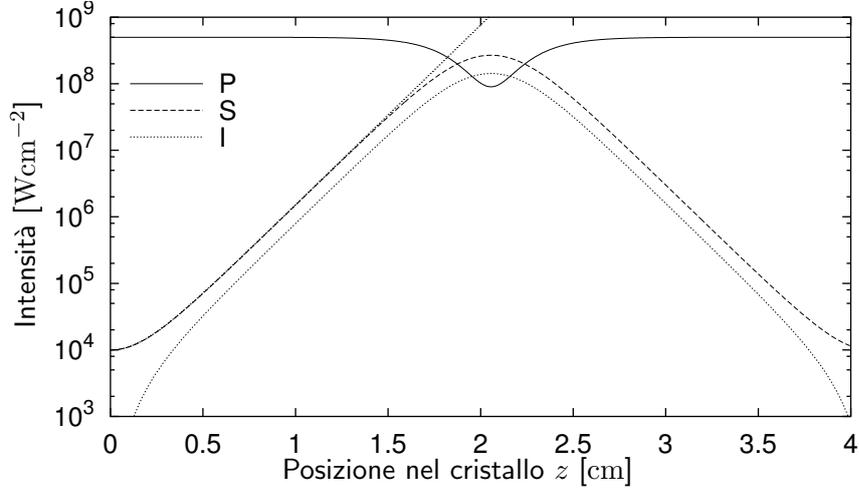


**Figura 9:** Differenza tra i tempi di percorrenza del cristallo per i tre fasci  $\delta t^j$  per un cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$  con un fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527$  nm e  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$ .

## 4 Saturazione del guadagno

La soluzione analitica del sistema in eq. 20 esula dallo scopo di questo rapporto. Inoltre risulta di non facile utilizzo, richiedendo funzioni speciali. Per maggiori dettagli vedere in [1]. La soluzione di questo sistema è stata trovata numericamente, tramite le librerie numeriche della GNU e, in particolare, utilizzando il metodo di Runge-Kutta implicito ai punti Gaussiani al 4° ordine.

Partendo dagli parametri già indicati nei paragrafi precedenti (cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$ ; fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527$  nm,  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$  e  $I_p^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$ ) si è supposto un segnale ad una lunghezza d'onda di  $\lambda_S^0 = 805$  nm e intensità iniziale  $I_S^0 = 10^4$  Wcm $^{-2}$ . L'andamento dell'intensità dei tre fasci in funzione della posizione  $z$  è mostrata in fig. 10.



**Figura 10:** Andamento dell'intensità dei fasci all'interno del cristallo per i seguenti parametri: cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$ ; fascio di pompa a  $\lambda_P^0 = 527$  nm,  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$  e  $I_P^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$ ; segnale a  $\lambda_S^0 = 805$  nm e  $I_S^0 = 10^4$  Wcm $^{-2}$ .

Finché le intensità dei fasci di segnale e idler rimangono trascurabili rispetto al fascio di pompa, la soluzione numerica riproduce quella analitica di basso segnale, mostrata nel grafico per il segnale con una curva punteggiata.

Quando l'intensità del segnale si avvicina all'intensità della pompa, si entra in zona di saturazione, dove l'intensità della pompa diminuisce fino a raggiungere un minimo. Tale posizione corrisponde anche al punto di massimo guadagno. Passando a posizioni maggiori si ha un'inversione, per cui l'intensità del segnale e dell'idler diminuiscono mentre quella del fascio di pompa torna al valore iniziale.

Ovviamente, aumentando l'intensità iniziale del segnale, la posizione di saturazione si avvicina all'inizio del cristallo, come mostrato in fig. 11. Da questo grafico si può notare come la scelta appropriata della lunghezza del cristallo può essere utilizzata per ridurre le fluttuazioni di intensità. In questo caso, infatti, scegliendo un cristallo di circa 2.1 cm si ha un'intensità del segnale finale compresa tra  $10^8$  Wcm $^{-2}$  e  $2.610^8$  Wcm $^{-2}$ , contro i due ordini di grandezza dell'intensità iniziale.

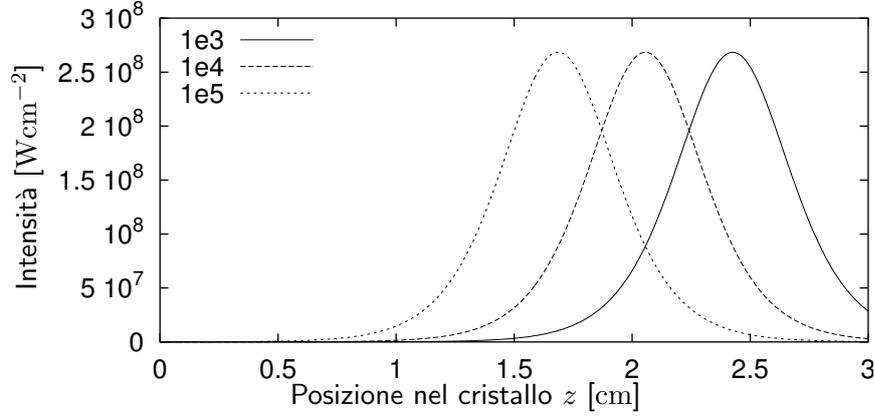
Analogamente, cambiando l'intensità iniziale del fascio di pompa si sposta la zona di saturazione. Tuttavia questo comporta anche ad una modifica del guadagno, a parità di lunghezza del cristallo, come mostrato in fig. 12.

## 5 Simulazione di un OPCPA

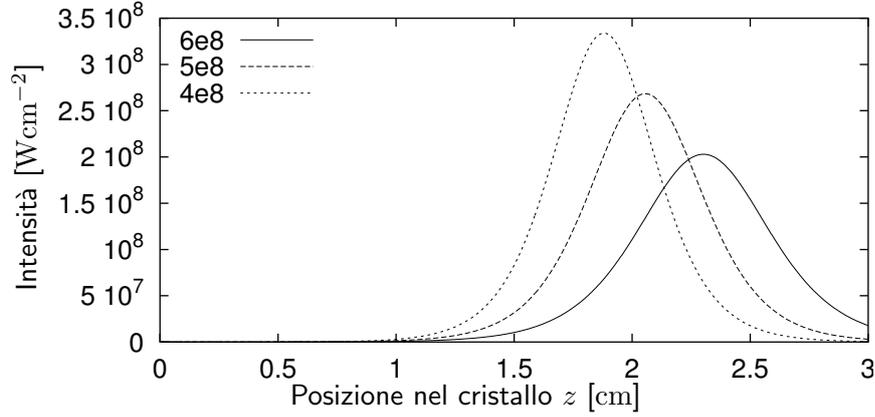
Consideriamo ora un'impulso laser della forma

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t^2} e^{-i\omega_0 t} + c.c. \quad (47)$$

dove  $\Gamma$  è un parametro complesso e  $\omega_0$  è la pulsazione dell'impulso. Tale impulso laser è la schematizzazione di un impulso allungato spettralmente, dove il parametro  $\Gamma$



**Figura 11:** Andamento dell'intensità del segnale all'interno del cristallo per tre differenti intensità iniziali (esprese in  $\text{Wcm}^{-2}$ ).



**Figura 12:** Andamento dell'intensità del segnale all'interno del cristallo per tre differenti intensità iniziali del fascio di pompa (esprese in  $\text{Wcm}^{-2}$ ).

risulta essere

$$\Gamma = \frac{2 \ln 2}{\Delta t^2} \pm i \frac{2 \ln 2}{\Delta t^2} \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta t_{min}^2} - 1} \quad (48)$$

con  $\Delta t$  la durata attuale dell'impulso e  $\Delta t_{min}$  la durata dell'impulso prima dell'allungamento. Il segno è definito in base al tipo di dispersione usata per l'allungamento. Nel nostro caso si è supposto il segno  $+$ . Tale scelta non ha nessuna influenza sul risultato finale.

Insieme all'impulso di eq. 48 si può definire una pulsazione istantanea  $\omega_t$  che è pari a

$$\omega_t(t) = 2 \text{Im}(\Gamma) t + \omega_0. \quad (49)$$

Nel caso in cui  $\Delta t \gg \Delta t_{min}$  si può considerare l'impulso ad un certo istante  $t$  come se fosse un'onda monocromatica con una pulsazione pari a  $\omega_t(t)$  e un campo elettrico pari a  $E(t)$ . Sfruttando questo fatto è possibile utilizzare i codici sviluppati per l'OPA per simulare l'amplificazione di un impulso allungato.

Lo schema utilizzato è il seguente. Chiamiamo  $E_{IN}$  l'impulso di segnale prima dell'OPA e  $E_{OUT}$  dopo l'OPA. Ad un certo istante  $t$  la frequenza istantanea e il campo elettrico complesso di  $E_{IN}$  e si usano come valori iniziali per il fascio di segnale dell'OPA.

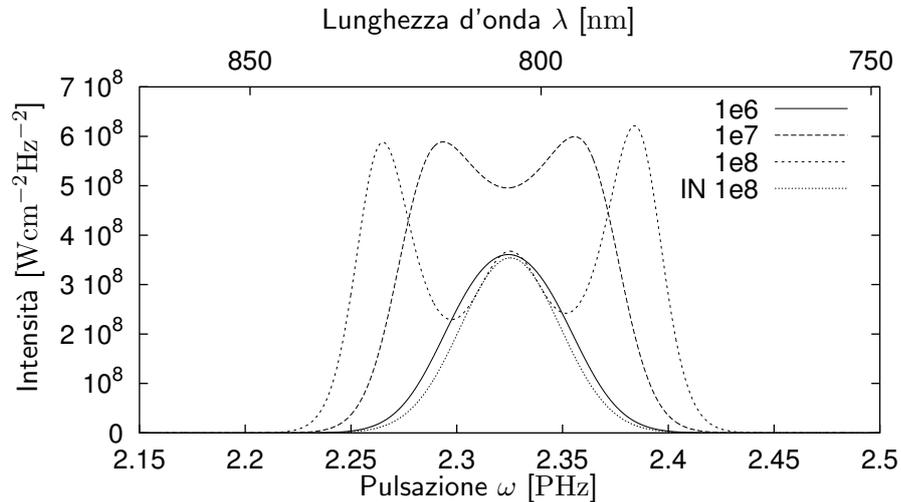
Calcolato il campo elettrico del segnale dopo l'OPA, lo si attribuisce a  $E_{OUT}$  relativamente a  $t + L_c/v_0$ .

Per poter verificare la durata minima dell'impulso dopo l'amplificazione e la compressione, l'impulso  $E_{OUT}$  viene sovracampionato tramite un'interpolazione lineare sia sul modulo che sulla fase del campo elettrico. Successivamente si calcola la trasformata di Fourier, ottenendone lo spettro, e si esegue un fit della fase delle varie componenti spettrali con un polinomio. Una volta sottratto questo polinomio dalle fasi dello spettro, si anti trasforma, ottenendo così l'impulso compresso.

## 5.1 Singolo stadio

Consideriamo un singolo stadio di amplificazione OPCPA basato su un cristallo BBO di 1 cm e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$ , e con un fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527$  nm,  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$  e  $I_p^0 = 5 \cdot 10^8$  Wcm $^{-2}$ . Supponiamo di dover amplificare un impulso laser con  $\lambda_s^0 = 805$  nm di  $\Delta t_{min} = 50$  fs allungato a  $\Delta t = 250$  ps.

Sono state considerate tre intensità massime iniziali del segnale:  $I_s^0 = 10^6$  Wcm $^{-2}$ ,  $I_s^0 = 10^7$  Wcm $^{-2}$  e  $I_s^0 = 10^8$  Wcm $^{-2}$ . Lo spettro degli impulsi dopo l'amplificazione è mostrato in fig. 13.

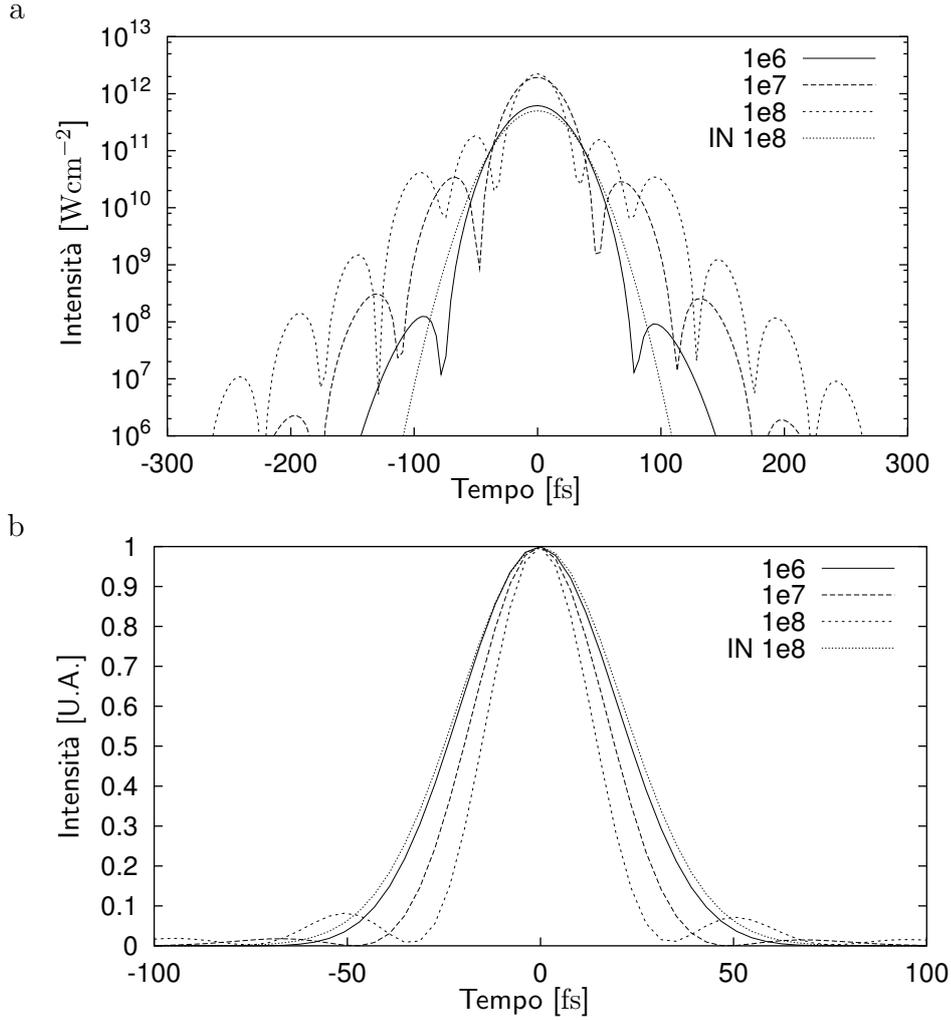


**Figura 13:** Spettro dell'impulso da 50 fs amplificato per tre differenti intensità iniziali (esprese in Wcm $^{-2}$ ). Viene anche riportato lo spettro prima dell'amplificazione a  $I_s^0 = 10^8$  Wcm $^{-2}$ .

Si nota subito una grossa differenza tra i tre casi. A bassa intensità ( $I_s^0 = 10^6$  Wcm $^{-2}$ ), lo spettro non è stato sostanzialmente deformato. Nel caso con  $I_s^0 = 10^7$  Wcm $^{-2}$  si forma una buca nel mezzo, denotando la presenza di saturazione dell'amplifica-

zione nel centro dell'impulso. Infine, nel terzo caso, la saturazione è notevolmente aumentata, amplificando principalmente le code spettrali dell'impulso.

Dopo la ricompressione (si è considerato un polinomio di secondo grado), fig. 14, l'impulso presenta delle code, più importanti nel caso con  $I_S^0 = 10^7 \text{ Wcm}^{-2}$  e assenti nell'impulso originario.



**Figura 14:** Impulso da 50 fs amplificato dopo la ricompressione per tre differenti intensità iniziali (esprese in  $\text{Wcm}^{-2}$ ): a - intensità in scala logaritmica; b - intensità normalizzata rispetto al massimo. Viene anche riportato l'impulso ricompresso prima dell'amplificazione a  $I_S^0 = 10^8 \text{ Wcm}^{-2}$ .

La durata dell'impulso finale risulta essere addirittura inferiore a quella dell'impulso iniziale, grazie al fatto che si è amplificato maggiormente le code dello spettro. Questo porta, d'altro canto, alla formazione delle code sopra citate.

Supponendo un diametro del fascio di 8 mm, si ottiene la seguente tabella riassuntiva degli impulsi nei tre casi considerati.

$I_S^0$	Energia In	Potenza In	Energia out	Potenza Out	$\Delta t_{min}^{OUT}$
$10^6 \text{ Wcm}^{-2}$	0.13 mJ	2.5 GW	15.5 mJ	0.31 TW	48 fs
$10^7 \text{ Wcm}^{-2}$	1.3 mJ	25 GW	39.9 mJ	0.96 TW	39 fs
$10^8 \text{ Wcm}^{-2}$	13 mJ	0.25 TW	39.1 mJ	1.1 TW	30 fs

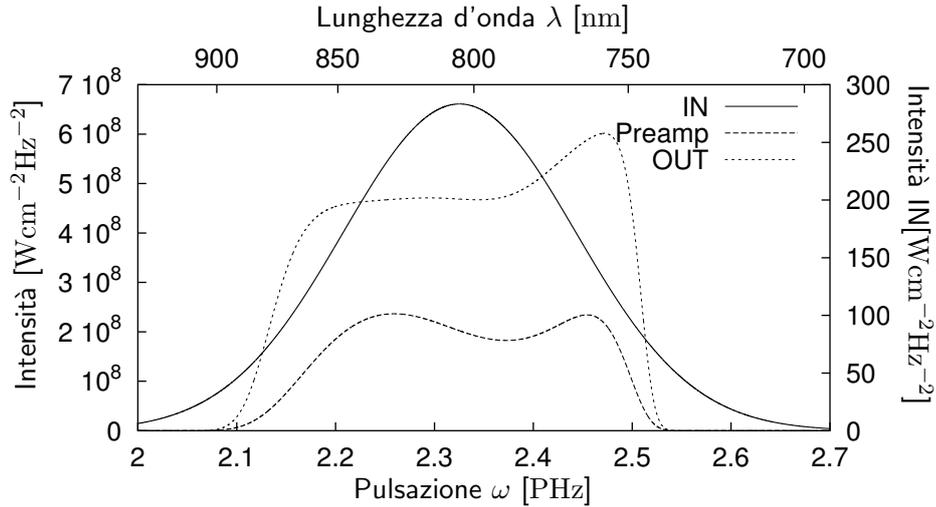
## 5.2 Doppio stadio

Come seconda simulazione si è supposto di dover amplificare un impulso più corto, con  $\Delta t_{min} = 10 \text{ fs}$ , allungato sempre a 250 ps, partendo però da intensità più basse. Si suppone, insomma, di dover amplificare un impulso proveniente da un oscillatore.

Lo schema simulato si basa su due stadi OPCPA, entrambi basati su di cristallo BBO e  $\theta \simeq 26.5133^\circ$  e con un fascio di pompa a  $\lambda_p^0 = 527 \text{ nm}$ ,  $\alpha \simeq 2.4504^\circ$  e  $I_p^0 = 5 \cdot 10^8 \text{ Wcm}^{-2}$ . Il primo stadio, chiamato preamplificatore, usa un cristallo da 2.4 cm, e ha il compito fare il grosso dell'amplificare, senza necessariamente andare in saturazione. Il secondo stadio, invece, usa un cristallo da 1 cm, e lavora in saturazione.

Tra il primo e il secondo stadio si suppone di espandere il fascio di un fattore 4 sui diametri, in modo da ridurre l'intensità massima, con un'efficienza dell'80%. L'intensità massima dell'impulso allungato all'ingresso del preamplificatore è supposta pari a  $10^2 \text{ Wcm}^{-2}$ .

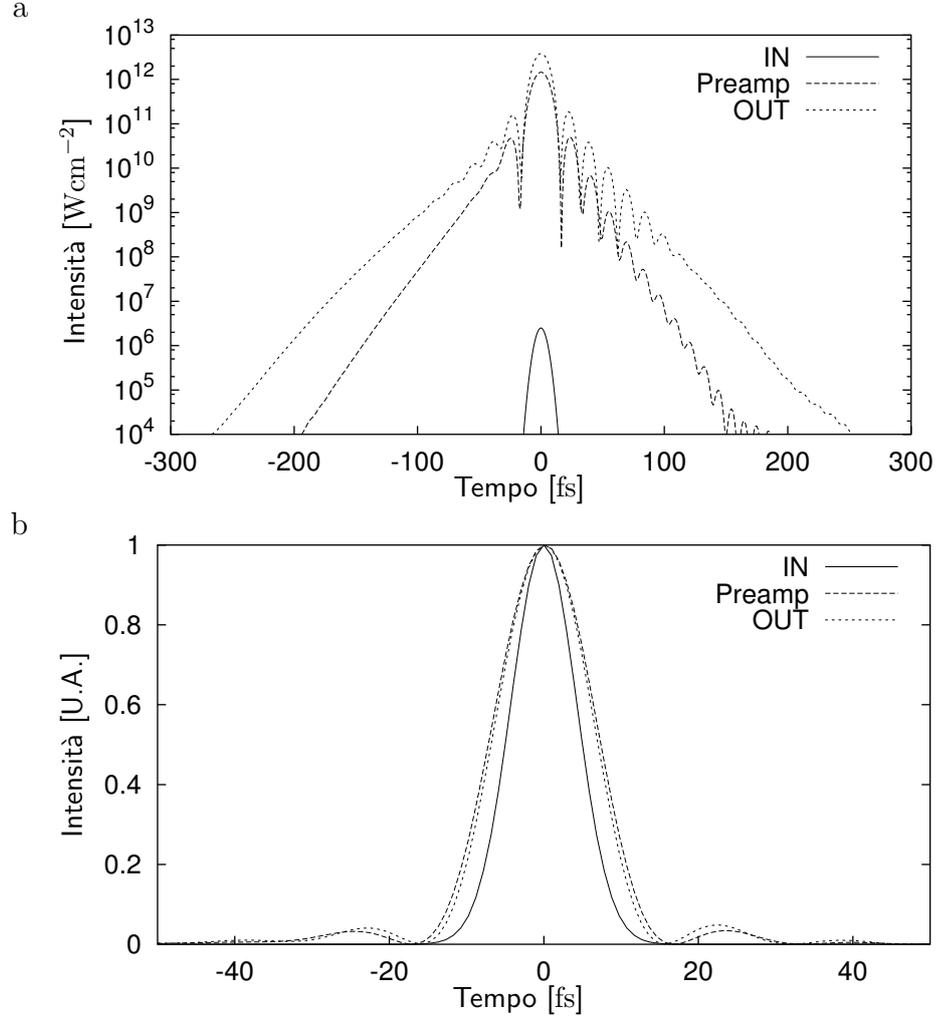
Lo spettro dell'impulso all'ingresso, dopo il preamplificatore e all'uscita è mostrato in fig. 15. Si nota che l'amplificazione taglia le code dello spettro dell'impulso in ingresso, squadrandolo. Si può anche osservare l'andamento caratteristico della curva di guadagno sullo spettro dell'impulso finale.



**Figura 15:** Spettro dell'impulso da 10 fs ai tre differenti stadi (ingresso, dopo il preamplificatore e dopo l'amplificatore).

Dopo la ricomprensione, dove è stato necessario considerare un polinomio del quarto ordine, appaiono ancora delle code, come nel caso precedente, che però risultano essere meno intense. Tali code sono presenti anche dopo il solo preamplifi-

cattore, denotando il fatto che sono dovute alla deformazione dello spettro dovuto l'amplificazione e non dalla saturazione di quest'ultima (fig. 16).



**Figura 16:** Impulso da 10 fs dopo la ricompressione ai tre differenti stadi (ingresso, dopo il preamplificatore e dopo l'amplificatore): a - intensità in scala logaritmica; b - intensità normalizzata rispetto al massimo.

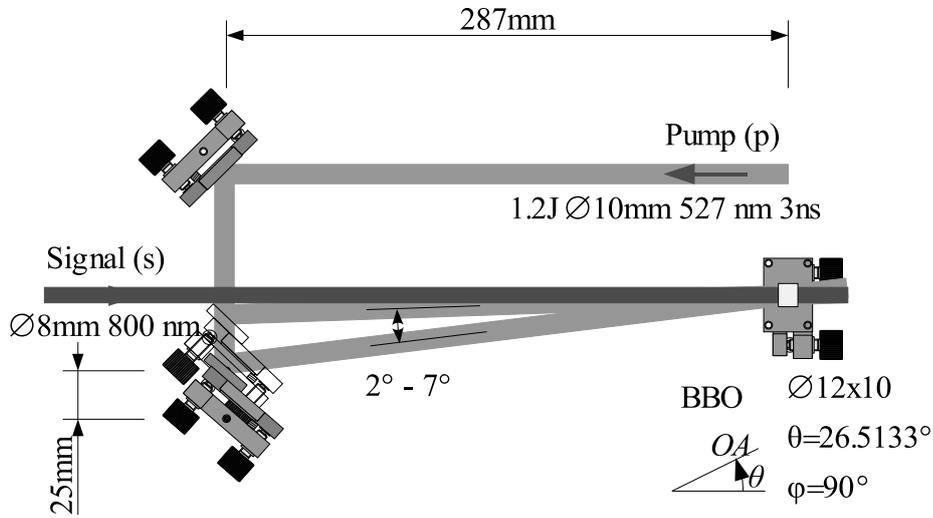
La durata finale dell'impulso risulta essere leggermente allungata rispetto a quella iniziale, passando da 10 fs a circa 14 fs già dopo il preamplificatore.

Supponendo un diametro del fascio all'ingresso del primo stadio pari a 2 mm, si ottengono i dati della seguente tabella.

	Energia	Potenza Massima	$\Delta t_{min}^{OUT}$
Oscillatore	0.83 nJ	78 kW	10 fs
Preamplificatore	0.72 mJ	46 GW	14.5 fs
Amplificatore	29.4 mJ	1.9 TW	13.7 fs

## 6 Possibile setup sperimentale

Dato che gli angoli critici sono due, uno legato al cristallo ( $\theta$ ) e l'altro ai due fasci laser ( $\alpha$ ), è necessario traslare almeno uno specchio per poter trovare la configurazione adatta. Dato che il fascio amplificato deve poi essere raccolto ed utilizzato, risulta più comodo pensare ad un cristallo tagliato in modo da risultare pressoché normale alla direzione di quest'ultimo, riducendo così al minimo le deviazioni introdotte. Risulta quindi necessario traslare uno specchio del fascio di pompa, cosa fattibile con le precisioni richieste utilizzando una traslatore munito di micrometro. Un possibile setup sperimentale è mostrato in fig. 17.



*Figura 17: Possibile setup sperimentale per le prove di un OPCPA.*

Supponendo di utilizzare il sistema laser ai ns operante presso l'ILIL, è necessario duplicare uno dei due fasci in modo da ottenere un fascio 10 mm di diametro con un'energia di 1.2 J in 3 ns in verde. Si può pensare di effettuare un primo allineamento utilizzando il sistema laser a 10 Hz da 200 mJ a 532 nm. Questo però non è utilizzabile per un OPCPA dato che non è singolo modo longitudinale.

Come segnale da amplificare si utilizza in un primo momento una sorgente "bianca" per studiare la banda di amplificazione. Successivamente si può pensare di amplificare parte dell'impulso allungato del sistema laser Ti:Sa operante presso l'ILIL.

## 7 Conclusioni

L'utilizzo di un amplificatore OPCPA presenta numerosi vantaggi rispetto ad un convenzionale amplificatore Ti:Sa:

1. ha una banda di amplificazione maggiore e più uniforme

2. premette alti guadagni in un singolo passaggio
3. non presenta emissione spontanea
4. non assorbe il fascio di pompa.

D'altro canto ha, indubbiamente, dei difetti

1. criticità di allineamento
2. necessita di un laser di pompa singolo modo longitudinale
3. saturazione in intensità

mentre un amplificatore Ti:Sa è caratterizzato da

1. semplicità di allineamento (almeno per gli stadi di alta energia)
2. non richiede fasci di pompa particolari
3. saturazione in fluensa
4. mantiene l'inversione di popolazione per  $2 \mu\text{s}$ .
5. presenta emissione spontanea.

Da quanto detto un sistema laser ad alta energia basato completamente su OPCPA risulterebbe proibitivo, sia per quanto riguarda i laser di pompa sia per il mantenimento. Dai conti fatti, un ulteriore stadio di amplificazione OPCPA richiederebbe un cristallo di almeno 2.5 cm di diametro e un fascio di pompa da 7 J in 3 ns per ottenere solo 200 mJ.

Un possibile schema utilizza due stadi OPCPA per amplificare l'impulso dell'oscillatore fino a qualche mJ senza modificare sensibilmente la durata limite dell'impulso e virtualmente senza ASE.

A questo punto si può pensare di utilizzare due stadi Ti:Sa multipasso in modo da portare l'energia fino a qualche J, utilizzando dei laser di pompa relativamente economici.

Dato che l'amplificazione fatta dal Ti:Sa risulterebbe solo di un fattore  $10^3$ , l'impulso finale dovrebbe mantenere una buona durata limite ( $\approx 20$  fs) con un basso ASE (virtualmente dovuto all'emissione del primo stadio Ti:Sa e quindi di modesta entità).

## Riferimenti bibliografici

- [1] R. A. Baumgartner and R. L. Byer. *Optical parametric amplification*. IEEE journal of quantum electronics, vol. 15(6), pp. 423–444 (June 1979)

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Amplificazione parametrica</b>	<b>3</b>
2.1	Phase matching . . . . .	4
2.2	Modello matematico di un OPA . . . . .	5
2.3	Guadagno a basso segnale . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Selezione degli angoli</b>	<b>9</b>
3.1	Selezione del $\theta_B$ ottimale . . . . .	10
3.2	Scelta di $\alpha$ . . . . .	10
3.3	Direzione dei fasci . . . . .	12
3.4	Velocità di gruppo . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Saturazione del guadagno</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Simulazione di un OPCPA</b>	<b>15</b>
5.1	Singolo stadio . . . . .	17
5.2	Doppio stadio . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Possibile setup sperimentale</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>